

碩 士 學 位 論 文

위상최적화기법을 이용한 대퇴골  
골 재형성 현상 분석

위상최적화기법을 이용한 대퇴골 축의 곡률분석

2004年

漢 城 大 學 校 一 般 大 學 院

기계시스템 學科

기계시스템 專攻

李 奇 泰

碩士學位論文  
指導教授 崔載烽

위상최적화기법을 이용한 대퇴골  
골 재형성 현상 분석

위상최적화기법을 이용한 대퇴골 축의 곡률분석

An analysis of femoral bone remodeling using  
topology optimization

2004年 12月 日

漢城大學校 一般大學院

기계시스템공 學科  
기계시스템 專攻

李 奇 泰

碩 士 學 位 論 文  
指 導 教 授 崔 載 烽

위상최적화기법을 이용한 대퇴골  
골 재형성 현상 분석

위상최적화기법을 이용한 대퇴골 축의 곡률분석

An analysis of femoral bone remodeling using  
topology optimization

위 論 文 을 기 계 시 스템 공 학 碩 士 學 位 論 文 으 로 提 出 함

2004年 12月 日

漢 城 大 學 校 一 般 大 學 院

기 계 시 스템 공 학 科  
기 계 시 스템 專 攻

李 奇 泰

李奇泰의 기계시스템工學碩士學位論文을 認定함

2004年 12月 日

審査 委員長\_\_\_\_\_ (印)

審査 委員\_\_\_\_\_ (印)

審 思 委 員 \_\_\_\_\_ (印)

# 목 차

Notation.....	1
1. 서론.....	2
2. 연구 내용 및 방법.....	4
1) 이론적 배경.....	4
(1)균질화기법.....	4
(2)위상최적화기법.....	10
2) 대퇴골 주요 형상 변수 추출.....	18
3) 대퇴골 응력 해석.....	18
4) 위상최적화 모델의 설정.....	21
5) 위상최적화 해석.....	22
3. 결과.....	24
(1) 대퇴골 주요 형상 변수 추출.....	24
(2) 대퇴골 응력 해석.....	27
(3) 위상 최적화용 해석 모델의 설정.....	29
(4) 곡률 분석.....	33
4. 고찰.....	37
5. 결론.....	42

참고문헌.....	43
ABSTRACT.....	47

## List of Tables

Table 1. 대퇴골에 가해지는 하중의 종류.....	20
Table 2. 대퇴골 형상 요소와 곡률(1/m)과의 결정계수값.....	24
Table 3. 60kg~70kg의 체중을 지닌 표본에서의 형성요소와 곡률 (1/m) 간의 결정계수값.....	25
Table 4. 60kg~70kg의 체중을 지닌 표본에서의 형성요소와 Neck angle 간의 결정계수값.....	25
Table 5. 위상최적화 해석에 사용될 5개의 형상 데이터.....	25
Table 6. 각 모델에 적용된 하중 값(kN).....	28
Table 7. 측정된 곡률값과 위상최적화된 곡률값.....	34

## List of Figures

Figure 1. 균질화기법의 밀도법.....	5
Figure 2. Rank 1, 2 material type.....	7
Figure 3. 위상최적화 해석의 예.....	11
Figure 4. 균질화기법과 최적화 기준법을 이용한 위상 최적화 기법의 해석 과정.....	17
Figure 5. 대퇴골 응력 해석을 위한 물성치.....	19
Figure 6. Standardized femur model 및 유한요소해석에 적용된 하중의 종류.....	20
Figure 7. Types of non-design area.....	22
Figure 8. Neck angle에 따른 대퇴골의 형상.....	26
Figure 9. Load case 1,2의 위상 최적화 결과.....	27
Figure 10. 위상최적화용 해석 모델의 기본 형상.....	29
Figure 11. 사면체 요소를 이용한 위상최적화 해석 결과.....	31
Figure 12. 위상 최적화 해석을 위한 모델.....	32
Figure 13. Model-A의 위상 최적화 해석 결과.....	33
Figure 14. 측정된 곡률 값과 위상 최적화 해석을 통한 곡률 값의 비교.....	35
Figure 15. 측정된 곡률 값과 위상 최적화 해석을 통한 곡률 값 간의 변화율 비교 .....	35
Figure 16. 8개 하중 적용시의 위상최적화 해석 결과.....	38
Figure 17. SKO(Soft kill optimization)를 이용한 망상골의 위상최적화 과정.....	39
Figure 18. 전도율(Conduintivity)을 이용한 망상골의 위상최적화 과정.....	40



# Notation

$a, b$	hole side length dimension of microcell in homogenization model
$E$	elastic modulus
$N$	number of finite elements
$f$	body forces
$t$	tractions
$D$	constitutive matrix
$D^H$	homogenized constitutive matrix
$D^0$	constitutive matrix for homogeneous solid
$\varepsilon$	strain
$\zeta$	move limit
$\eta$	damping factor
$\theta$	orientation of microscale perforations in homogenization
$\lambda$	lagrangian multiplier
$\Lambda$	starting lagrange multiplier in bisection method
$\nu$	Poisson's ratio
$\Pi$	total potential energy
$\rho$	density
$\rho^0$	density of homogeneous solid
$\sigma$	stress component
$\Phi$	strain energy density
$\chi$	discrete function
$\Omega$	domain of problem
$\Omega_s$	solid domain

# 1. 서론

인간의 골격 계는 하중의 영향에 따라 형상과 구조의 조절 및 재구성을 반복하는 기계적으로 최적화된 생체 시스템이다. 이러한 뼈를 구성하는 치밀골(cortical bone, compact bone)과 망상골(trabecular bone, cancellous bone)의 형상은 물리적 하중에 대하여 적응할 수 있도록 묵은 뼈는 없애고 새로운 뼈로 대체하는 생성과 흡수 과정을 매우 역동적, 지속적으로 반복 재생하면서 신체의 균형을 유지하는데 이를 골 재형성(bone remodeling) 현상이라 한다.[1,2] 이러한 골 재형성의 기전(mechanism)은 명확히 밝혀진 바는 없으나, 일반적으로 변형에 가장 잘 견디(maximum strain)거나, 하중을 가장 잘 전달(maximum stress)하거나, 변형 에너지(strain energy)가 최소가 되도록 하는데 요인이 있다고 주장되고 있다.

본 연구의 목적은 골 재형성의 기전이 뼈의 변형 에너지가 최소(minimum compliance)가 되도록 진행해 간다라는 가정 하에 위상최적화(topology optimization)기법을 적용하여 대퇴골(femur)의 형상 중 대퇴골에 작용하는 굽힘 하중을 완화 시켜주는 요소인 대퇴골 축(shaft)의 곡률(curvature)을 분석해 보고자 한다. 또한 위상최적화 기법을 이용하여 기계적으로 최적화된 실제 골 재형성을 통해 최적화 되어있는 곡률의 값을 비교, 검토하여 최적화 과정에서 선택한 목적함수인 변형 에너지의 최소가 골 재형성을 표현하기에 적합한지를 알아보고자 한다.

이러한 연구 목적을 달성하기 위한 방법으로 먼저 대퇴골의 형상 중 어떠한 요소가 대퇴골 축의 곡률에 변화를 주는지를 알아보기 위해 실제 측정된 대퇴골의 형상 데이터를 기초로 회귀 분석을 통하여 곡률 변화에 가장 큰 영향을 미치는 요소를 찾아내었고, 가장 큰 영향을 미치는 형상 요소가 변할 때 대퇴골 축에 작용하는 하중의 크기와 방향이 변한다는 점을 이용하여 위상최적화 기법에 적용하였다. 여기서 대퇴골 축의 곡률 변화를 표현하기 위한 위상최적화 해석용 모델을 개발하였으며, 이를 활용하여 기계적으로 최적화된(위상최적화 기법을 이용한) 곡률 값을 구하고 실제 측정된(골 재형성을 통하여 최적화된) 곡률 값과 서로 비교하였다.

본 연구에 사용되는 위상최적화 기법은 1904년 A. G. M Michell[3]에 의해 처음으로 언급되었으나 당시 이 문제를 해결하기 위한 수학적 이론과 컴퓨터를 이용한 연산 작업에 대한 기반이 없었다. 이후 1950년대부터 연구가 시작된 균질화기법(homogenization method)을 기초로 1985년 Murat과 Tartar에 의해서 균질화기법을 이용하여 형상최적화 문제를 해결할 수 있는 수학적 이론을 형성하게 되었으며, 위상최적화 기법이 처음 언급된지 80여년이 지난 1988년 Bendsøe와 Kikuchi[4]에 의해 처음으로 컴퓨터 연산을 이용한 위상최적화 문제 해결방법이 제시되었다. 이러한 위상최적화기법은 기존의 치수(size)와 형상(shape) 최적화 문제를 모두 포함하고 있으며, 80년대 이후 현재까지는 주로 minimum compliance에 관한 문제에 대해 이론적으로 연구되어 많은 산업 현장이나 대학에서 자동차나 항공기, 우주 비행선 그리고 많은 구조물에 대한 중량을 감소시키는 문제에 적용하였고, 최근에 와서는 기계 구조물의 공진 주파수의 최적화 문제뿐만 아니라, 음의 프와송비(negative Poisson's ratios)나 음의 열팽창 계수(negative thermal-expansion coefficients)를 지니는 재료, 그리고 청각장애(hearing aids)를 위한 MEMs(micro electro mechanical system)등에 사용되고 있다.[5]

이러한 위상최적화 기법을 이용하여 신체의 골 재형성을 표현하는데 있어 현재까지도 많은 연구가 이루어지고는 있지만 신체의 특정 부위에 대해서 골 재형성을 연구한 예는 많지가 않으며, 이러한 연구를 통하여 골 재형성을 보다 근본적으로 이해할 수 있고 뼈의 형상 예측도 가능하리라 예상되며 인공삽입물(prosthesis)과 뼈에 관한 연구를 통하여 보다 효과적인 인공관절/삽입물들이 개발될 수 있을 것으로 기대된다.

## 2. 연구 내용 및 방법

### 1) 이론적 배경

#### (1) 균질화기법 (homogenization method)

미세구조를 갖는 복합재료의 균질화된 재료의 상수 행렬을 구하는 문제는 이론역학 분야에서 50년대부터 본격적으로 연구되었다. 이중 Hashin과 Shtrikman[6]은 미세구조 상에서의 입자가 임의로 배치된 복합재료의 해석에 있어 최소 위치에너지원리(principle of minimum potential energy)를 이용하였고, 70년대에 들어서 프랑스 Lions[7]의 연구 그룹이 이러한 수학적 이론에 균질화기법이라는 명칭을 사용하였다. 이렇게 공학자와 응용수학자들에 의해 구축된 균질화기법은 주기적으로 배치된 미세구조가 있는 구조물의 등가재료특성을 예측할 수 있을 뿐만 아니라 미세구조 내에서의 구조 응답을 효율적으로 계산할 수 있는 이론으로서 이를 형상최적설계에 도입하게 된 것은 1985년 Murat과 Tartar[8]에 의해서이며, 균질화기법의 수학적 이론을 형성한 이들은 다음과 같이 기술하고 있다. “설계변수가 영역의 형상인 경우 50년대에 이미 Hadamard가 경계를 법선 방향으로 이동함에 따른 에너지 범함수의 변분을 구함으로써 해결되었다. 그러나 이 생각에는 큰 제약뿐만 아니라 결함이 있다. 이 방법으로는 외형형상을 아주 조금 변화시킬 수밖에 없고 영역내부에 구멍을 생성하거나 영역외부에 작은 부분을 첨가하는 것은 불가능하다.” 즉, 구조물의 내부에 구멍을 만들거나 구조물의 첨가가 가능하기 위해서는 다음의 특정 함수

(1-1)

를 도입하여 해결할 수 있다. 이때  $\Omega$ 는 설계 영역(design area)이며,  $\lambda$ 는 설계영역 내에서의 하나의 요소를 뜻한다. 그러나 특성함수  $\lambda_{\Omega}$ 가 매우 작은 영역에서는 이산화된 ‘0’ 또는 ‘1’의 값이므로 상당히 불연속적이고 이방성의 성향을 나타내므로 고전적 미분개념으로는 해결될 수 없지만 균질화법의 이론을 이용하면 이 문제는 해결될 수 있다.

위상최적화 기법에서 균질화기법의 사용을 알아보기 위해 fig 1.을 살펴보면 (a)에서와 같은 거시적인(macroscopic)영역 내에 있는 미세(microscopic) 영역을 살펴보면 재료(solid) 혹은 구멍(void)일 수가 있는 1개의 요소( $\lambda$ )가 유한개 배치되어 있으며 이를 전 영역에 적용해 보면

$$\Omega_s = \int_{\Omega} (1 - ab) d\Omega \quad (1-2)$$

과 같이 표현할 수 있다. 이때  $0 \leq a \leq 1$ ,  $0 \leq b \leq 1$ 이며  $\Omega$ 는 설계 영역(design domain),  $\Omega_s$ 는 재료가 분포 되어 있는 영역(solid part)이다.

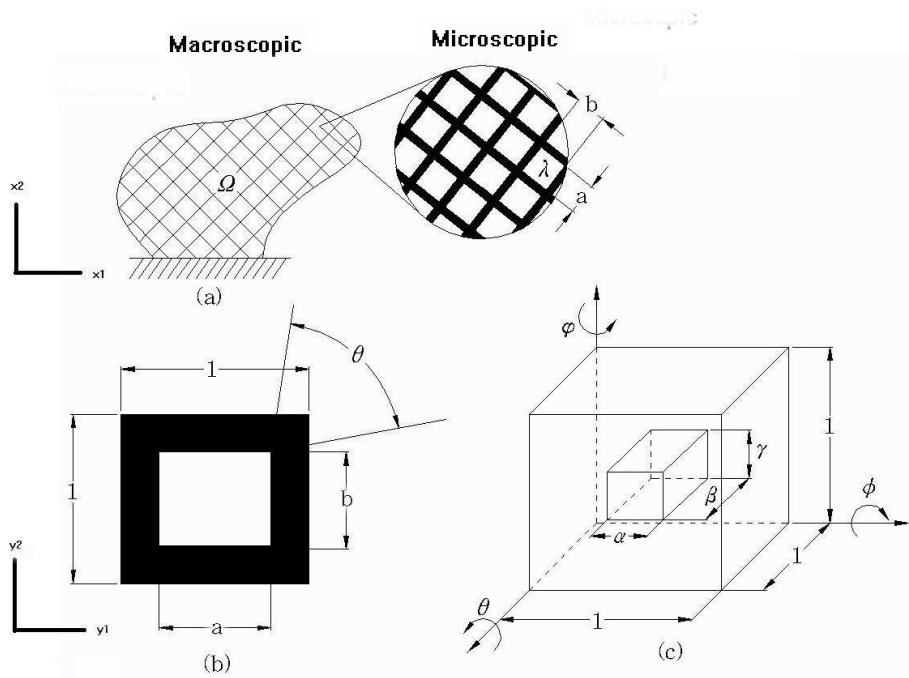


fig 1. 균질화기법의 밀도법(a) 전체 설계 영역 (b) unit cell, 2D 요소 (c) 3D 요소

일반적으로 전 영역을 구성하는 재료의 기본 셀(unit cell)은 재료의 방향( $\theta$ )에 따라 전 영역에 적용시킬 수 있는 좌표축과는 다른 좌표축을 지닐 수 있고, 그때의  $\mathcal{L}$ 는 탄성 구성행렬(elastic constitutive matrix)의 물성

치(properties)에 변화를 줄 수 있으므로 최적화 문제를 해결하기 위한 하나의 unit cell의 변수는  $a, b, \theta$ 가 존재하게 되며, 이러한 하나의 unit cell이 설계 영역( $\Omega$ )내에서 유한개로 이산화 되어 있다. 이를 유한요소 해석에 적용 시 unit cell을 하나의 요소(element)라 한다면 설계 영역 내에서는  $3N$ 개의 설계 변수가 존재하게 된다. ( $a, b, \theta \quad i = 1, 2, \dots, N$ )

여기서 하나의 직사각 요소(rectangular unit cell)를 등방성 재료(isotropic material)나 직립성 재료(orthotropic material)라 가정 하게 되면 2차원 문제에서의 평면 응력/변형률(plane stress/strain)의 구성 방정식은 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

이때  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ )는 응력(stress)을 나타내고,  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ )는 변형률(strain)을 나타내며,  $D_{ij}$ 는 재료의 강성행렬(stiffness matrix)을 나타낸다.

$D$ 는  $a, b$ , 그리고  $\theta$ 의 함수이므로

$$D = D(a, b, \theta) \quad (1-4)$$

로 나타낼 수 있으며, 이때  $\theta$ 의 영향은

$$D = R^T(\theta) D(a, b) R(\theta) \quad (1-5)$$

와 같이 텐서 변환(tensor transformation)으로 계산이 가능하다.

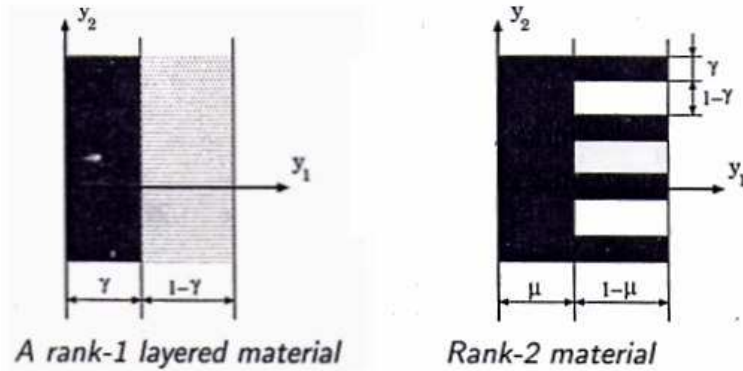


fig 2. rank 1, 2 material type : rank 1, 2 material type, rank 1 은 재료 부분과 재료가 없는 부분으로 나뉘어져 있으며 rank 2는 rank 1이 여러 개 결합되어 있으며 재료만을 지니는 영역이 서로 수직하게 결합되어 있다.

위와 같이 한 요소에서 정의된 문제를 전체 영역에 적용시키기 위해 대표적으로 사용되는 기본 셀 종류로는 rank-1, 2 material(fig 2), artificial material type(fig 1(b)) 이 있으며, rank-2 material은 rank-1 material에 재료 부분 (solid part)을 수직하게 결합시킨 요소로 위상최적화 기법에 일반적으로 사용되는 재료 타입(material type)이기는 하나, 본 연구에서는 밀도법(density method)을 사용하는 artificial material type을 이용하였으며 이는 다음과 같다.

밀도법은 rank-1, 2 material에 재료의 밀도 개념을 포함시킨 재료 타입으로 일반적으로 재료가 분포되어 있는 위상최적화 문제에서 구조물은 이산 함수(discrete function)  $\chi$ 를 이용하여 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$(1-6)$$

이때  $x$ 는 재료의 각 위치를 나타낸다. 여기서 구조물을 균질한 재료로 가정한다면

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \chi(x)\rho^0 \\ D(x) &= \chi(x)D^0 \end{aligned} \quad (1-7)$$

여기서,  $\rho$ 와  $D$ 는 각각 재료의 밀도(density)와 탄성행렬(elasticity matrix)을 나타낸다. 전체 영역을 고려하여 수치 해석적 방법으로 계산하고자 하면  $\chi(x^e)$ 로 표현되며, 각 요소(element)의  $e$ 는 설계 변수가 된다. 그러나 이러한 방법은 이산화된 방식(유한요소 해석시 mesh가 만들어진 방식)에 따라 결과가 변할 수 있으므로 이산화된 변수  $\chi(x)$ 대신 연속성을 지닌 변수  $\zeta(x)$ 를 사용하여

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \zeta(x)\rho^0 \\ D(x) &= \zeta(x)D^0 \end{aligned} \quad (1-8)$$

과 같이 표현하고, 이때  $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ 이며,  $x \in \Omega$ 이다.

여기서,  $\zeta(x)$ 는 사각 구멍을 지닌 unit cell로 구성되어 있으며

$$\zeta(x) = 1 - \alpha(x) h(x) \quad (1-9)$$

로 표현될 수 있다.

구조물을 등방성으로 가정하게 되면 평면응력 문제에서 균질화된 강성행렬은

$$D^H = \frac{(1-\alpha)^\mu E}{(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu^2)/2 \end{vmatrix} \quad (1-10)$$

와 같이 표현되며, 이를 orthotropic material 문제로 가정하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{vmatrix} (1-\beta)^\mu & \alpha[(1-\alpha)(1-\beta)]^{\mu/2} & 0 \\ \alpha[(1-\alpha)(1-\beta)]^{\mu/2} & 1-\alpha^\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}[(1-\alpha)(1-\beta)]^{\mu/2} \end{vmatrix} \quad D^H = \frac{(1-\alpha)^\nu E}{(1-\nu^2)} \quad (1-11)$$

이때,  $\gamma$ 와  $\mu$ 는 실험적으로 구해지는 값이다.

이와 같은 방법으로는 유한요소해석 시 mesh 작업에 따라 결과의 변화가 생길수도 있지만 rank - 1, 2 material에 비해 연산 방법이 매우 간단하고 연산 속도가 빠르며 엔지니어의 관점에서는 하나의 요소가 재료가 있는가('1', solid), 없는가, ('0', void)로 구분되기 때문에 명확한 결과를 얻을 수 있는 장점이 있다.

이렇듯 균질화기법은 위상최적화 과정에 있어서 불연속적이고 이방성으로 변해가는 형상 문제에 대한 구성방정식에서의 강성행렬을 만들기 위해 사용된다.

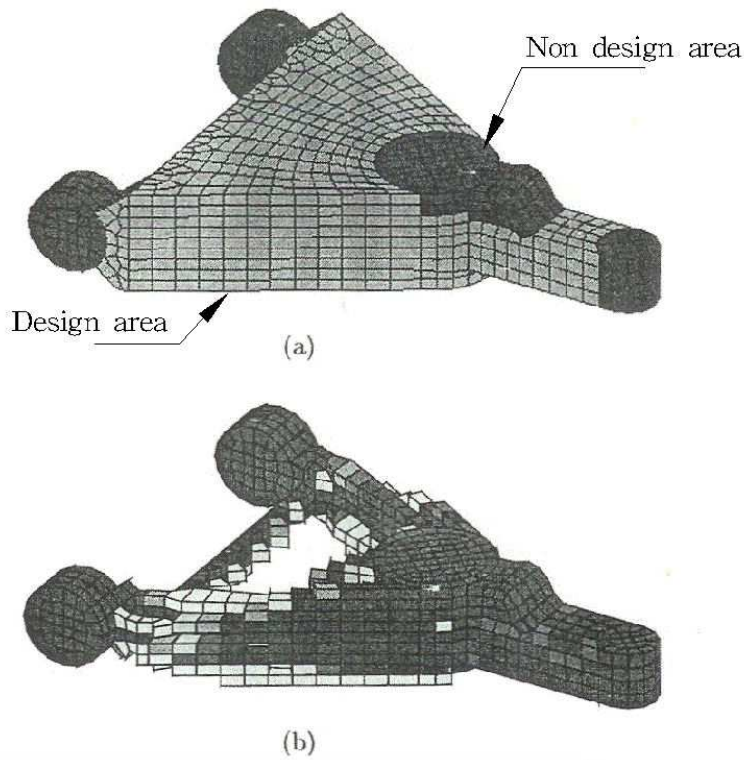
## (2) 위상최적화 기법 (topology optimization method)

일반적으로 size optimization, shape optimization 기법은 설계된 구조물의 효과를 증가시키는데 반해 위상최적화 기법은 여러 가지 목적에 사용될 수 있다. 위상최적화 기법을 사용함으로써 얻을 수 있는 이익들을 살펴보면

- ① 제품 설계시 초기 디자인으로써 활용이 가능하다.
- ② 유한요소해석의 skewed, tapered 등과 같은 악 조건으로부터 자유롭다.
- ③ 내부와 외부의 최적 형상을 동시에 얻을 수 있다.

여기서, Bends  $\phi$ e와 Kikuchi는 첫 번째 내용을 강조했다.[4] 제품의 초기 디자인은 사용 목적에 따라 엔지니어의 경험을 바탕으로 기본 설계를 만들게 되는데 이러한 경험 없이도 만들고자 하는 제품의 대략적인 형상과 경계조건을 입력함으로써 최적화된 형상을 만들어 낸다. fig 3.

위상최적화의 개념을 이해할만한 Sigmud의 예를 보면[5], 기존의 설계 방식으로 차를 디자인 할 경우 엔지니어는 오랜 기간을 통하여 축적된 ‘경험’을 바탕으로 설계를 시작하게 된다. 그러나 대부분의 소비자들의 요구는 저 연비에 보다 안락한 승차감을 요구하게 되는데, 저 연비를 위해서는 차의 중량을 줄어야 하고 차의 중량을 줄이면서 안전성과 승차감을 향상시켜야 한다는 문제에 직면하게 된다. 마찬가지로 비행기 또한 자체 무게가 줄어들수록 연료 소모율이 줄어들며 보다 많은 승객을 태울 수 있게 될 것이다. 그러나 비행기 또한 착륙이나 비행 시의 폭풍, 난류들에 저항할 수 있어야 한다. 더불어 무게를 최소화한다는 개념은 그만큼의 생산비용을 절감시킬 수 있다는 의미 또한 포함하고 있다. 이러한 문제들을 해결해 주는 열쇠가 위상최적화 기법이나, 1904년 이후 80년이라는 시간이 지날 동안 위상최적화 기법을 컴퓨터 프로그래밍에 의한 연산으로 해결할 수 있는 방법이 제시되지는 않았다. 그러나 수많은 엔지니어들과 수학자들의 연구로 만들어진 균질화기법을 도입하여, 컴퓨터 연산을 기본으로 하는 위상최적화용 알고리즘을 처음 만든 것은 1988년 Bends  $\phi$ e와 Kikuchi[4]이며 그 방법을 살펴보면 다음과 같다.



**fig 3.** 위상최적화 해석의 예 (a) 설계 영역(design area)와 비 설계 영역(non-design area) (b) 위상최적화된 형상(density plot)  
 (Courtesy of Altair Computing Inc. Troy, Michigan, USA.)

위상최적화 기법을 이용한 평면 탄성 문제에 있어 균질화기법은 수학적으로 다음과 같이 정의된 최적화 문제로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } \Pi(u) \\
 & \mathbf{a}, \mathbf{b}, \theta \quad (e=1, \dots, N) \\
 & \text{such that } \sum_{e=1}^N (1 - a^e b^e) \Omega^e - \Omega_s \leq 0 \quad (2-1)
 \end{aligned}$$

$$\text{and} \quad \begin{array}{ll} a^e - 1 \leq 0 & e = 1, \dots, N \\ -a^e \leq 0 & e = 1, \dots, N \\ b^e - 1 \leq 0 & e = 1, \dots, N \\ -b^e \leq 0 & e = 1, \dots, N \end{array}$$

여기서  $I(u)$ 는 전체 위치 에너지(total potential energy)를 뜻하며

$$I(u) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} \varepsilon^T(u) D^e \varepsilon(u) d\Omega - \sum_{e=1}^N \int_{\Omega^e} u^T f d\Omega - \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma^e} u^T t d\Gamma \quad (2-2)$$

과 같이 표현된다.

이러한 최적화 문제를 해결하기 위한 최적화 조건은 설계변수 및 상태 변수 모두에 있어서 일반적으로 비선형 형태이고, 평형방정식에 있어서도 설계변수는 비선형적으로 표시되므로 반복적인 수치해법이 요구된다. 일반적인 최적화 문제에 있어서는 순수한 수치적 접근방법인 수리계획법(mathematical programming)이 보편적이지만, 최적구조 설계에 있어서는 많은 설계변수에 적용할 수 있는 최적화 기준법(optimality criteria method)이 효과적이며, 균질화기법에서도 이 방법을 이용하여 최적화 알고리즘을 유도한다. 이러한 최적화 기준법은 기본적으로 Lagrange multipliers와 Kuhn-Tucker conditions을 이용하여 최적화 필요조건을 유도하고, 이 필요조건을 만족시키기 위해 반복 연산한다.

위의 식을 해결하기 위한 최적화기준법은 다음과 같은 Lagrangian을 정의하여 유도 할 수 있다.

$$\begin{aligned} L(A, B, E) = I(u) - & \lambda \left[ \sum_{e=1}^N (1 - a^e b^e) \Omega^e - \Omega_s \right] - \sum_{e=1}^N \lambda_a^e (-a^e) - \sum_{e=1}^N \lambda_b^e (b^e - 1) \\ & - \sum_{e=1}^N \lambda_{\bar{a}}^e (-b^e) - \sum_{e=1}^N \lambda_{\bar{b}}^e (a^e - 1) \end{aligned} \quad (2-3)$$

여기서  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_{\bar{a}}, \lambda_{\bar{b}}$  ( $e=1, \dots, N$ )은 라그랑지 승수(Lagrangian

multipliers)이며, 위의 식을 a, b,  $\theta$ 에 대한 변분으로 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T(u) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta(u) d\Omega - \int_{\Omega} u^T \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta(u) d\Omega + \lambda_a^e - \lambda_a^e = 0 \quad (2-4)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T(u) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta(u) d\Omega - \int_{\Omega} u^T \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta(u) d\Omega + \lambda_b^e - \lambda_b^e = 0 \quad (2-5)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T(u) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta(u) d\Omega = 0, \quad (e=1, \dots, N) \quad (2-6)$$

마찬가지로 Kuhn-Tucker condition을 사용하여 전환조건(switching condition)을 표현하면 다음과 같다.

$$\sum_{e=1}^N (1 - a^e b^e) \Omega^e - \Omega_s \leq 0; \quad \lambda \left[ \sum_{e=1}^N (1 - a^e b^e) \Omega^e - \Omega_s \right] = 0; \quad \lambda \geq 0 \quad (2-7)$$

$$a^e - 1 \leq 0; \quad \lambda_a (a^e - 1) = 0; \quad \lambda_a \geq 0, \quad e = 1, \dots, N \quad (2-8)$$

$$-a^e \leq 0; \quad \lambda_a (-a^e) = 0; \quad \lambda_a \geq 0, \quad e = 1, \dots, N \quad (2-9)$$

$$b^e - 1 \leq 0; \quad \lambda_b (b^e - 1) = 0; \quad \lambda_b \geq 0, \quad e = 1, \dots, N \quad (2-10)$$

$$-b^e \leq 0; \quad \lambda_b (-b^e) = 0; \quad \lambda_b \geq 0, \quad e = 1, \dots, N \quad (2-11)$$

위의 a, b,  $\theta$ 의 변분에 관한 식부터 전환조건까지의 비선형식으로부터  $7N + 1$ (여기서 'N'은 요소의 개수)의 식이 유도되며, 이는 컴퓨터를 이용한 연산 이외의 방법으로는 불가능하다. 각 변수에 대한 보완(updating scheme)이 필요하며, 설계변수가 상한 값을 초과하거나 하한 값보다 작을 때 문제가 발생하게 된다. 위의 식에서는 외력에 대한 감도는 존재하지 않으므로 설계변수 a가 상한 값과 하한 값의 사이에 존재하게 하면서 반복 연산을 하기 위해서는 다음과 같은 식을 이용한다.

변수 a에 대해서는

(2-12)

$$a_k[(E_a)_k]^{\eta} = \begin{cases} \min\{(1 + \zeta) a_k, 1\} & \text{if } a_k(E_a)_k \leq \max\{(1 - \zeta) a_k, 0\} \\ \max\{(1 - \zeta) a_k, 0\} & \text{if } \max\{(1 - \zeta) a_k, 0\} < a_k(E_a)_k < \min\{(1 + \zeta) a_k, 1\} \\ \max\{(1 - \zeta) a_k, 0\} & \text{if } \min\{(1 + \zeta) a_k, 1\} \leq a_k(E_a)_k \end{cases}$$

(2-13)

이며, 변수 b에 대해서는

(2-14)

$$b_k[(E_b)_k]^{\eta} = \begin{cases} \min\{(1 + \zeta) b_k, 1\} & \text{if } b_k(E_b)_k \leq \max\{(1 - \zeta) b_k, 0\} \\ \max\{(1 - \zeta) b_k, 0\} & \text{if } \max\{(1 - \zeta) b_k, 0\} < b_k(E_b)_k < \min\{(1 + \zeta) b_k, 1\} \\ \max\{(1 - \zeta) b_k, 0\} & \text{if } \min\{(1 + \zeta) b_k, 1\} \leq b_k(E_b)_k \end{cases}$$

(2-15)

이다. 여기서,  $\zeta$ 는 감쇠계수(damping factor, 일반적으로 0.7 ~ 0.85)이고,  $\xi$ 는 이동한계(move limit, 일반적으로 0.01~0.1)를 나타내는데,  $\xi$ 의 값이 적을수록 설계변수의 구간이 줄어들기 때문에 안정적으로 수렴될 수 있지만 수렴 속도는 줄어들게 된다. 또한 위의 식을 살펴보면 보완되는 설계변수 ( $a_{k+1}$ ,  $b_{k+1}$ )는 보완 전의 Lagrange multiplier( $\lambda_k$ )에 의존함을 알 수 있다.

위상최적화 문제를 해결하기 위한 마지막 단계로 앞서 다공질로 가정한 구조물은 이방성 구조물이므로 하나의 기본 셀(unit cell)의 회전각이 구조물 전체의 목적함수에 영향을 미치게 된다. 따라서 이제는 기본 셀의

회전각( $\theta$ )이 목적 함수의 최대(최소)에 미치는 영향을 살펴보면 다음과 같다.

먼저 이방성 재료의 기준 좌표계에서 응력과 스트레인의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

여기서  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{66}$ 은 0이 아닌 탄성계수 값이고  $E_{11} \geq E_{22}$ 를 가정한다. 또한 스트레인 에너지 밀도(strain energy density)를 다음과 같이 정의하고,

$$\Phi = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-17)$$

주 스트레인 좌표계에 대한 재료 좌표계의 회전각  $\theta$ 를 이용하여 스트레인을 주 스트레인  $\epsilon_1$ 과  $\epsilon_2$ 로 표시하면 다음과 같다.

$$(2-18)$$

여기서 스트레인 에너지 밀도를 최대화 한다는 의미는 가장 견고한 구조물을 만든다는 의미이므로 스트레인 에너지 밀도  $\Phi$ 를 회전각  $\theta$ 에 대해 미분하여 다음의 조건을 만족시키면 된다.

$$\frac{RUND\Phi}{RUND\theta} = -\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\sin 2\theta(\alpha(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \beta(\epsilon_1 - \epsilon_2)\cos 2\theta) = 0 \quad (2-19)$$

$$\alpha = D_{11} - D_{22} \quad \text{and} \quad \beta = D_{11} + D_{22} - 2D_{12} - D_{66}$$

또한 이차 미분을 값을 고려하면, 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\alpha(\epsilon_1 + \epsilon_2)\cos 2\theta + \beta(\epsilon_1 - \epsilon_2)\cos 4\theta) \quad (2-20)$$

$\phi$ 를 최대화 하는 것은 매개변수  $\beta$ 에 의해 좌우되는 것을 알 수 있다. 여기서  $\beta$ 는 이방성 재료의 전단 강성(shear stiffness)을 나타내는 척도라 할 수 있다.

이제까지 언급한 균질화기법을 이용한 위상최적화 기법의 알고리즘을 단계별로 정리해 보면 다음과 같다.

- ① 전체 설계영역을 설정하고, 전체영역 내에서 설계 영역(design area)와 비 설계 영역(non-design area, 설계 영역 내에는 포함되지만 형상이 변하지 않는 부분)을 설정한다.
- ② 설계영역을 이산화 한다. 이는 유한요소 해석을 위한 요소만들기(meshing)작업을 뜻한다.
- ③ 설계변수를 초기화 한다. 즉,  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$ 의 초기 값을 지정하게 되는데  $a$ ,  $b$ 값은 각 요소(element)당 다른 값을 지니게 되며 초기  $\theta$ 값은 '0'이다.
- ④ 균질화기법을 이용하여 전체 영역에 대해 위상최적화 기법에 이용할 강성행렬을 만든다.
- ⑤ ④의 결과를 이용하여 유한요소 해석을 한다.
- ⑥ 최적화 기준법(optimality criteria)을 이용하여 각 셀의 밀도와 회전각을 보완(update scheme)한다.
- ⑦ 해석된 해가 수렴되었는지를 판단하고, 아니면 ④번 과정으로 되돌아간다.
- ⑧ 해석된 결과를 출력한다.

위 과정의 순서도는 fig 4.과 같다.

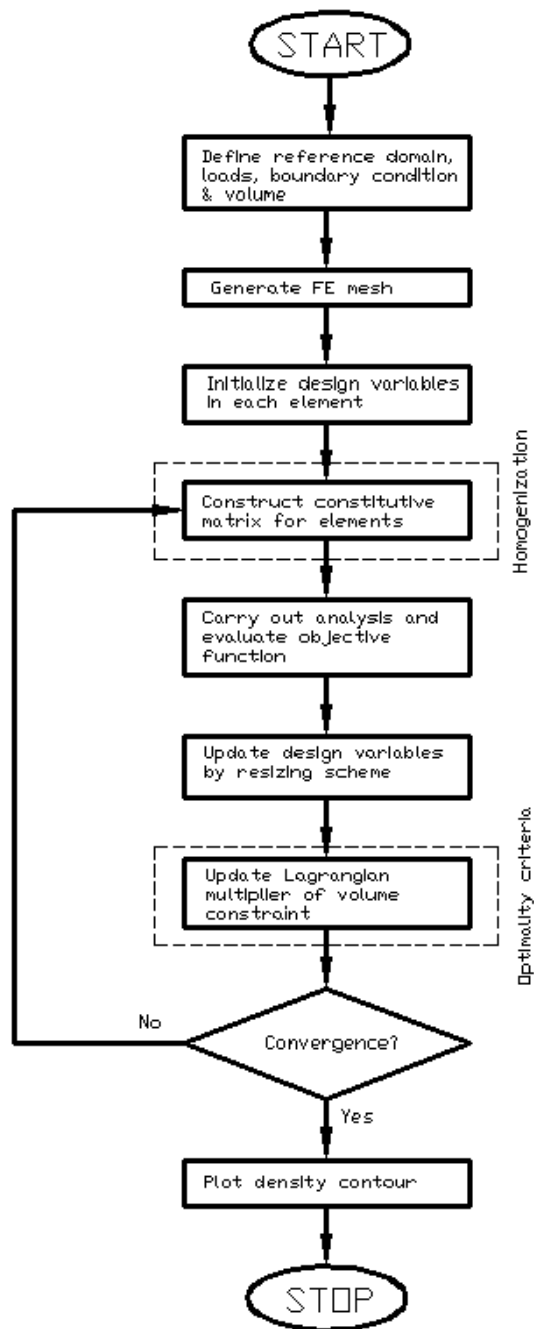


fig 4. 균질화기법과 최적화 기준법을 이용한 위상최적화 기법의 해석 과정

## 2) 대퇴골 주요 형상 변수 추출

본 연구에 있어 사용된 대퇴골 형상 데이터는 30~60대 정상 한국인 남녀 195명(남성 95명 여성 100명)의 대퇴골 형상을 CT 촬영한 후 3차원으로 재구성하여 추출한 데이터[9,10,11]이다. 데이터 분석은 기본적으로 신체적 조건인 체중을 먼저 고려하여 곡률에 가장 큰 영향을 줄 수 있는 체중 대에 포함되는 데이터를 추출하였고, 대퇴골 각 형상의 요소와 곡률간의 관계를 선형 회귀분석을 통하여 결정계수의 값이 가장 큰 대퇴골 형상을 추출하였다.

## 3) 대퇴골 응력해석

앞서 선정된 데이터를 사용하기 전 위상최적화에 적합한 모델을 만들기 위해 Pacific Research Labs(vashon Island Washington USA)에서 제작한 standardized femur model을 이용하였으며 이후 선정된 데이터를 이용하여 최적화 작업을 하였다.

대퇴골 응력해석 과정에서는 최종적으로 대퇴골 축의 네곳(내측, 외측, 전, 후)에서 작용하는 평균 하중의 크기와 방향을 분석하여 위상최적화 해석에 적용하고자 한다.

대퇴골의 물성치는 아직까지도 정확하게 제시된 값은 없으나 치밀골(compact bone)의 경우 일반적으로 사용되는 값인  $E = 20GPa$ ,  $\nu = 0.33$ 을 사용하였고, 망상골(trabecular bone)은 nano-indentation을 이용하여 측정된 값[12]  $E = 6.9 \pm 4.3GPa$ ,  $\nu = 0.3$ 을 사용하였다.(fig 5) 대퇴골은 linearly elastic, homogeneous, 그리고 isotropic material로 가정하였으며, I-DEAS NX10에서 전 처리 작업 후 ABAQUS(V 6.4)에서 해석하였다.

이때의 대퇴골에 가해지는 하중조건은 체중에 따라 변할 수도 있으나 본 연구에서는 동일한 하중 내에서의 값을 적용 70kg의 체중을 지닌 사람에게서 단순 보행시 작용하는 하중 값을 사용하였다.[13] 하중의 종류를 결정함에 있어 Pauwels은 ‘대퇴부에 작용하는 근육의 힘(muscle force)은

대퇴부에 작용하는 굽힘력(bending force)을 감소시켜 뼈에 작용하는 하중을 최소화 시켜준다.“라고 지적한바 있다.[14] 따라서, 본 연구에서는 대부분의 대퇴골 유한요소해석에 사용되는 근육 힘인 외전근(abductor muscle), ilio-tibial tract, 장요근(iliopsoas)을 사용하고, 골두(femoral head)에 joint reaction force를 적용 하였다. 이때 위상최적화에 적합한 하중의 종류를 결정하기 위해 골두와 대퇴골 상부 돌기(great trochater)에 작용하는 abductor muscle force를 사용하는 경우를 load case 1, 4개의 하중이 모두 작용하는 경우는 load case 2로 정하여 연산하였다.(fig 6. table 1)

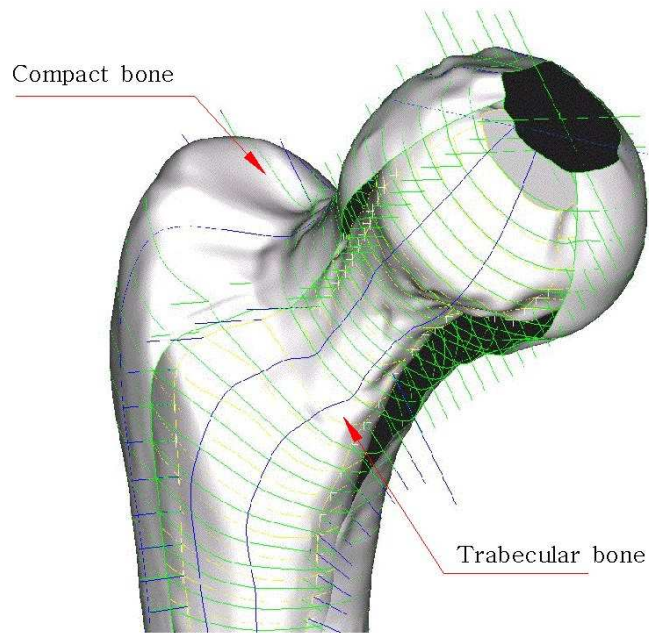


fig 5. 대퇴골 응력해석을 위한 물성,  
 치밀골(compact bone) :  $E=20\text{GPa}$ ,  $\nu=0.33$   
 망상골(trabecular bone) :  $E=6.9\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$

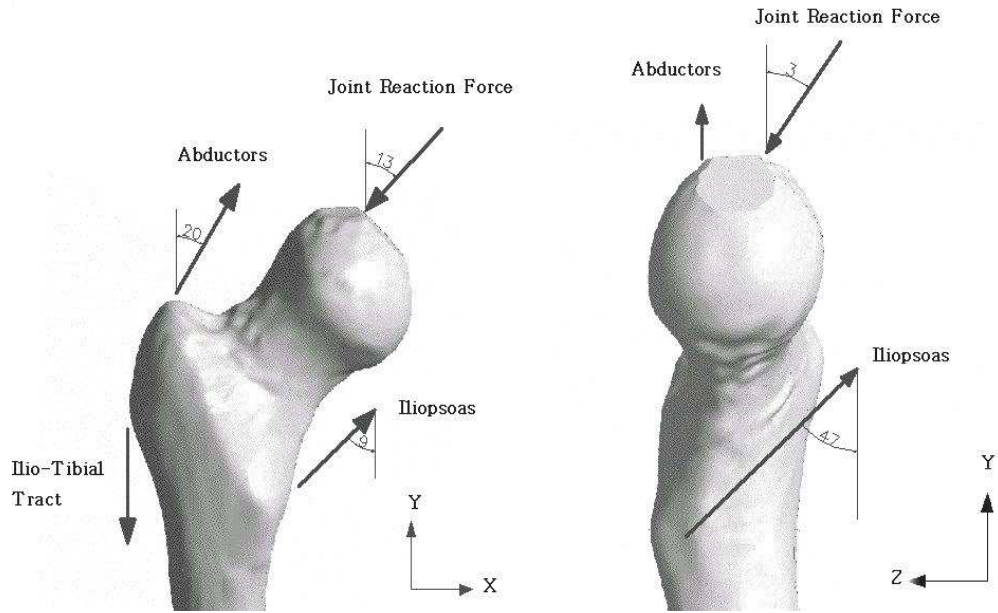


fig 6. standardized femur model 및 FE 해석에 적용된 하중의 종류

Load case number	Applied forces(kN)			
	$F_x$	$F_y$	$F_z$	Resultant
<b>1</b>				
Joint reaction force	0.616	0.171	-2.800	2.872
Abductors	-0.430		1.160	
<b>2</b>				
Joint reaction force	1.062	0.130	-2.800	2.997
Abductors	-0.430		1.160	1.237
Ilio-tibial tract			-1.200	1.200
Iliopsoas	-0.078	-0.560	0.525	0.771

table 1. 대퇴골에 가해지는 하중의 종류

#### 4) 위상최적화 모델의 설정

본 연구에서는 대퇴골 축의 곡률만을 살펴보고자 하므로 위상최적화를 위한 전체 모델은 대퇴골 축으로 한정되었고, 이에 따른 변수를 설정하여 반복 해석하였으며, 모델 설정을 위해 제시된 변수를 정리해 보면 다음과 같다.

- ① 기본 형상은 어떠한 것으로 정해야 하는가?
- ② 전체 모델의 크기는 어느 정도로 할 것인가?
- ③ 모델의 중앙에 구멍을 생성할 것인가?
- ④ non-design area는 어떤 부분에 어느 정도로 설정해야 하는가?
- ⑤ 요소의 개수는 몇 개 정도로 생성해야 하는가?

대퇴골의 곡률만을 살펴보기 위한 기본 형상으로는 6면체 기둥과 원기둥, 그리고 타원 기둥을 생각할 수가 있으며, 각 기본 형상에 대해 위상최적화 기법을 적용하여 곡률 표현의 적합성과 연산 과정에서의 수렴성, 연산 시간 등을 고려하여 기본 모델을 결정하고자 한다.

최적화 과정에서는 전체 설계 영역을 최대한으로 활용하여 최적화 형상을 만들어 나가기 때문에 모델의 크기는 원래 형상의 크기보다 작을 수는 없으며, 너무 클 경우 발산하거나 작용 하중을 점 하중(point load)으로 취급해 버리는 문제가 있다. 따라서 모델의 크기는 원래의 형상보다 작을 수는 없지만 너무 커서도 안되고, 어느 정도 적당한 크기를 지녀야 한다. 이는 수치적으로 계산될 수 없는 문제이기에 반복 연산을 통한 결과를 통하여 최적화된 형상이 곡률을 잘 표현 할 수 있는 모델의 크기 및 길이를 결정하고자 한다.

모델의 중앙의 구멍에 대해서는 구멍의 존재 여부 및 존재했을 때 어떠한 형상으로 만들어 주는 것이 더욱 정확하게 곡률의 형상을 보여주는가를 반복 연산하여 찾아내고자 한다.

비설계 영역(non-design area)은 설계 영역 내에서의 연산 과정에는 포함되지만 재료가 사라지지 않는 부분 즉, 비설계 영역으로 최적화 결과

에 큰 영향을 미치는 주요 요소 중 하나이다. 이러한 비설계 영역(non-design area)의 설정에서는 하중 지지점이 작용하는 영역을 유지하기 위해 이 위치를 non-design area으로 설정하였으며, non-design area에 대한 문제는 4 가지 타입을 설정(fig 7)하여 반복 연산하였다.

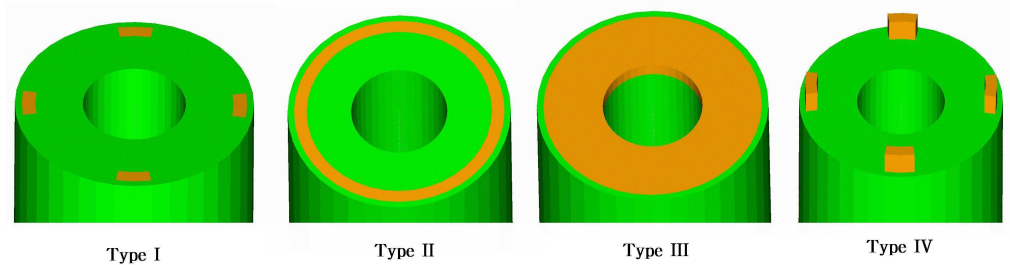


fig 7. types of non-design area

요소(element)의 결정을 위해서는 사면체 요소와 육면체 요소를 사용하여 각각 분석하고, 각 요소에 있어서 절점(node)의 개수를 고려하여 육면체 요소의 경우 8개의 절점 요소와 20개 절점 요소를 비교하고, 요소 개수의 증가에 따른 연산 시간을 고려하여(Qunit의 Optishape를 기준으로 요소의 개수가 3,000 개일 경우 45시간가량, 30,000 개일 경우 15일 가량의 연산 시간이 소모된다.) 적합한 요소의 타입과 개수를 설정하고자한다.

##### 5) 위상최적화 해석

본 연구에서 사용된 프로그램은 Quint사의 OPTISHAPE-TS를 사용하였다. 상기한 조건을 고려한 해석 모델로서 중공 타원 기둥을 사용하였으며, 모델의 크기는 대퇴골 축의 직경이 가장 큰 직경을 기준으로 가로 길이를 5mm 가량 증가시켰다. Non-design area는 type-II를 선택하였고, 요소의 개수는 2일 가량 연산 시간이 소모되면서 곡률을 표현할 수 있도록 20개의 절점을 지닌 육면체 요소를 약 3200 개 사용하였다.

선택된 5 개의 모델에 대하여 유한요소해석에 따른 하중 조건을 적용하였으며, 목적 함수는 minimum compliance, volume fraction을 70%로

설정하여 연산하였다.(최적화된 형상을 표현하는데 사용되는 체적의 크기로 전체 설계 영역을 100%로 봤을 때 volume fraction이 70%라면 설계 영역을 최적화 하는 과정에 있어 전체 체적이 30%가량 줄어든다.)

### 3. 결과

#### 1) 대퇴골 주요 형상변수 추출

형상 변수 분석으로 각 요소와 곡률간의 관계를 선형 회귀분석을 이용하여 살펴본 결과 체중이 가장 큰 요인으로 작용한다는 것을 알 수가 있으며(table 2), 특히 65kg~70kg사이에서 곡률의 증가가 큰 것을 알 수가 있었다. 따라서, 65kg~70kg를 지닌 데이터들을 따로 분류하여 각 형상과 곡률간의 관계를 살펴보면(table 3), 대퇴골의 전체 길이(total length)와 neck angle 순으로 곡률과의 관계가 큰 것을 보였지만, 같은 표본에서 neck angle과 각 형상간의 관계를 살펴보면(table 4) neck angle과 total length가 가장 큰 관계를 보이고 있으며, 다음으로는 head diameter, head offset순 이었다. 그러나, 장축일수록 굽힘 모멘트(bending moment)가 커져서 곡률이 증가될 수밖에 없으며 total length가 neck angle에 가장 큰 영향을 미치는 요소이므로 본 연구에서는 neck angle만을 고려하기로 하였다. Neck angle의 변화에 따른 곡률 값의 변화를 위상최적화 기법으로 알아보기 위해 neck angle에 따른 curvature의 변화는 있으나, total length, head diameter, 그리고 head offset의 변화가 표준 편차 내에서 큰 차이가 없는 데이터 5개를 선정하였다. (table 5)

형상 요소	결정계수( $R^2$ )
total length	0.1033
head diameter	0.0126
head offset	0.0003
neck diameter	0.00212
neck angle	0.0618
anteversion	0.0046
weight	0.1193

table 2. 대퇴골 형상 요소와 곡률(1/m)과의 결정계수값

형상요소	결정계수( $R^2$ )
total length	0.2483
head diameter	0.0077
head offset	0.0065
neck diameter	0.0073
neck angle	0.0192
anteversion	0.0031

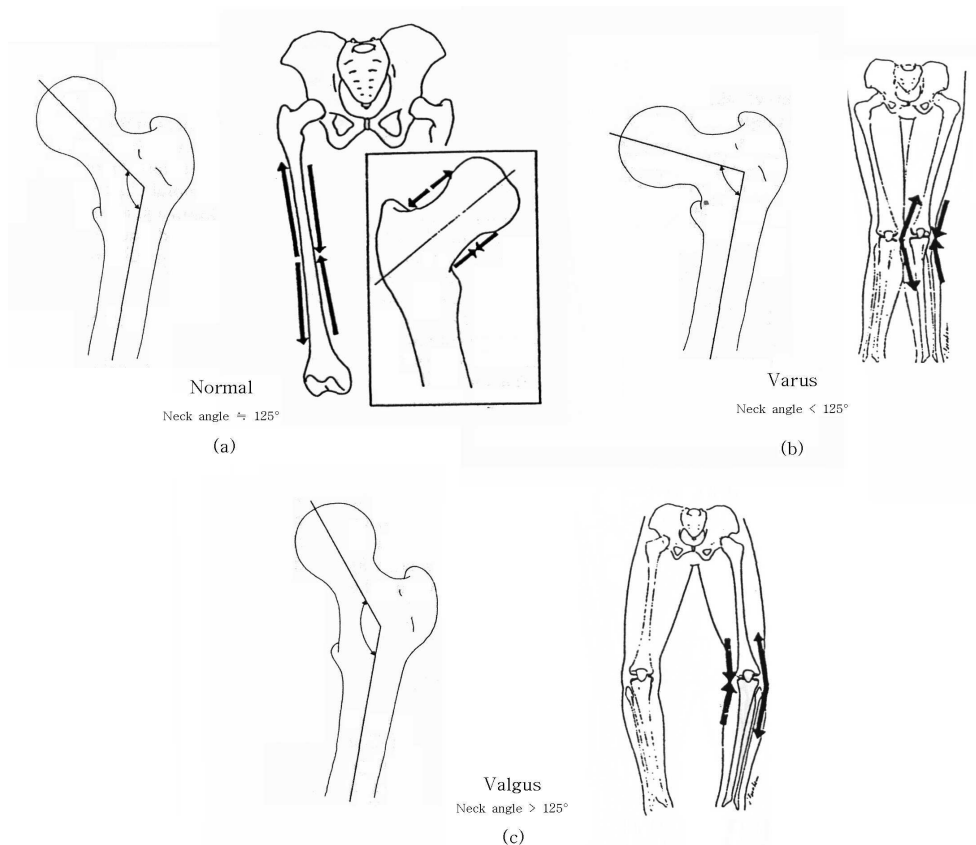
**table 3.** 65kg~70kg의 체중을 지닌 표본에서의 형상요소와 곡률(1/m) 간의 결정 계수 값

형상요소	결정계수( $R^2$ )
total length	0.257
head diameter	0.067
head offset	0.0339
neck diameter	0.0111
anteversion	0.0175

**table 4.** 65kg~70kg의 체중을 지닌 표본에서의 형상요소와 Neck angle 간의 결정 계수 값

Model	A	B	C	D	E
weight(kg)	69	65	65	66	68
total length(mm)	418.21	443.33	431.99	473.87	471.03
head diameter(mm)	44.88	47.39	46.06	48.2	50.24
head offset(mm)	45.27	42.44	40.3	47.2	43.15
neck angle(degree)	114.95	118.88	121.36	134.36	137.1
curvature(1/m)	1.77	1.95	2.29	2.36	2.64

**table 5.** 위상최적화 해석에 사용될 5개의 형상 데이터

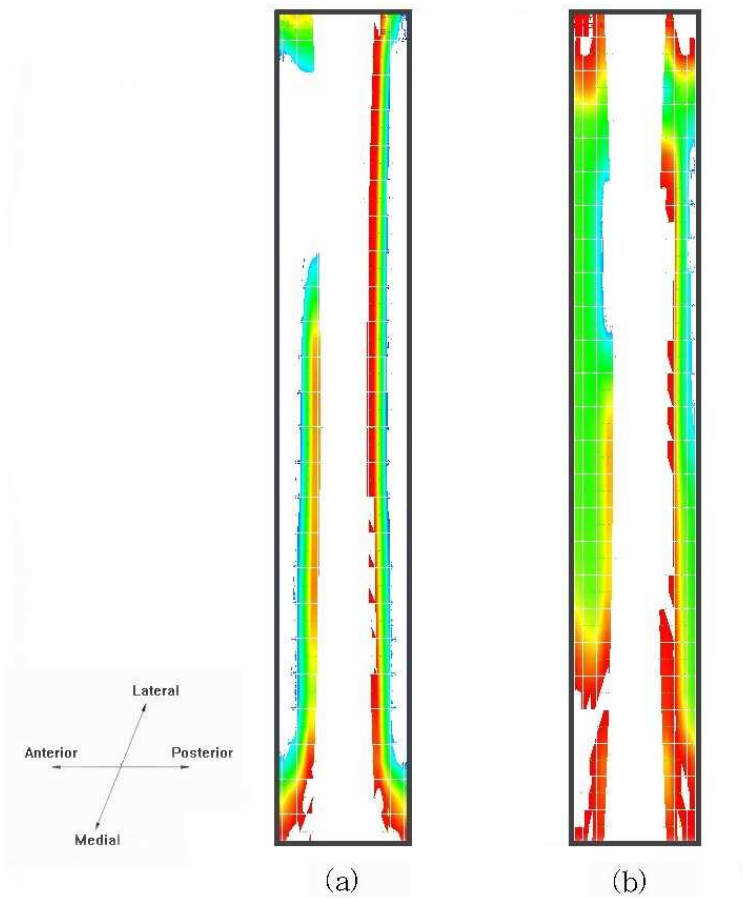


**fig 8.** neck angle에 따른 대퇴골의 형상 : 일반적인 neck angle은 125°이며 보다 작을 경우 내반(varus)의 형상(b)을 나타내며 클 경우 외반(valgus)의 형상(c)을 나타낸다. 그림에서의 화살표는 각 형상에서의 응력 방향을 나타내고 있다.

위와 같이 neck angle의 값에 따른 곡률값의 변화는 내반과 외반의 형상에 따른 곡률값의 변화와 유사하다. 일반적으로 neck angle의 각도는 fig 8 (a)에서처럼 125°의 평균값을 지니고 있지만 상황에 따라 90° ~ 135°의 각도 변화가 있다. 여기서 neck angle의 각이 125°보다 작을 경우 내반(varus, fig 8 (b), 다리가 안쪽으로 굽어 있는 형상)의 형상을 나타내게 되며 이때 대퇴골은 굽힘 모멘트를 많이 받게 되므로 축의 곡률이 작아지며 125°보다 클 경우 외반(valgus, fig 8 (c), 다리가 바깥쪽으로 굽어 있는 형상)의 형상이 나타나게 되어 축의 곡률이 커지게 된다.

## (2) 대퇴골 응력 해석 결과

대퇴골 FE 해석에 적용한 하중의 조건에 따fms 대퇴골의 축 상단 부분(lesser trochater에서 하방으로 전체 대퇴골 길이의 10% 위치에 해당하는 부분)의 4 방향축, 내측, 외측, 전, 후(medial, lateral, anterior, posterior)에 가해지는 하중의 분포를 구하고, 이를 평균 처리한 하중의 크기와 방향을 위상최적화 모델에 적용하였다. 그 결과, load case 2가 load case 1에 비해 곡률을 좀 더 근사적으로 생성시키는 것을 확인하였으며 (fig 9), 위에서 선정된 대퇴골 모델(table 5)에 load case 2를 적용하여 4개의 방향에서 발생하는 하중을 talbe6에 표시하였다.



**fig 9.** load case 1, 2의 위상최적화 결과 비교 (a) load case 1 (b) load case 2 이때 두 모델은 위상최적화용으로 설정된 모델을 사용하였다.

table 6.

각 모델에 적용된 하중 값(kN)

	Medial	Anterior	Lateral	Posterior
<b>Model A</b>				
x	-1	-4.07	0.443	0.352
y	-6.87	-0.621	1.27	-0.073
z	-24.7	-8.66	12.7	6.45
resultant	25.6571	9.588855	12.77103	6.46001
<b>Model B</b>				
x	-4.32	-2.81	0.328	-4.16
y	-5.56	-0.546	1.76	-1.52
z	-20.7	-13	9.4	9.41
resultant	21.86472	13.31143	9.56897	10.4002
<b>Model C</b>				
x	-16.9	-1.44	1.59	-1.83
y	-6.71	-0.719	-0.541	1.8
z	-29.5	-28.9	13.2	23.2
resultant	34.65377	28.94478	13.30642	23.34157
<b>Model D</b>				
x	-0.881	-1.14	0.219	0.855
y	-2.61	-0.226	1.35	-0.099
z	-26.4	-20.9	11.4	4.92
resultant	26.54333	20.93229	11.48174	4.99472
<b>Model E</b>				
x	-0.786	-0.655	0.237	-0.26
y	-2.93	-0.516	0.368	0.781
z	-22.3	-15.7	9.8	17.6
resultant	22.50539	15.72213	9.80977	17.61924

### (3) 위상최적화용 해석 모델의 설정

첫 번째로 제시되었던 변수인 기본 형상으로 원기둥, 타원기둥, 육면체를 설정한 뒤 구멍을 생성하지 않은 상태에서 길이는 모두 동일하게 200mm, 직경 및 폭은 30mm로 설정하여 위상최적화 기법을 이용한 결과 (fig 10), 육면체 모델은 위상최적화용 모델로 설정하기에는 부적합했으며, 원기둥과 타원 기둥 중 타원 기둥 모델이 중앙에 구멍을 생성하며 비록 곡률 표현에는 적합하지 않으나 하중 조건이나 모델의 형상을 조정해 감에 따라 근사적인 곡률을 표현할 수 있기에 타원 기둥 모델을 기본 형상으로 선택하였다.

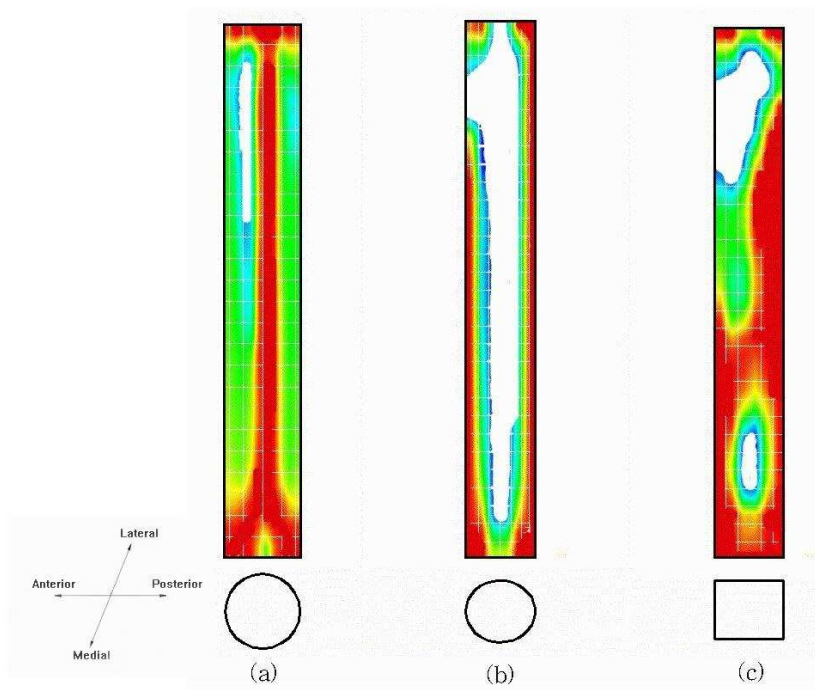


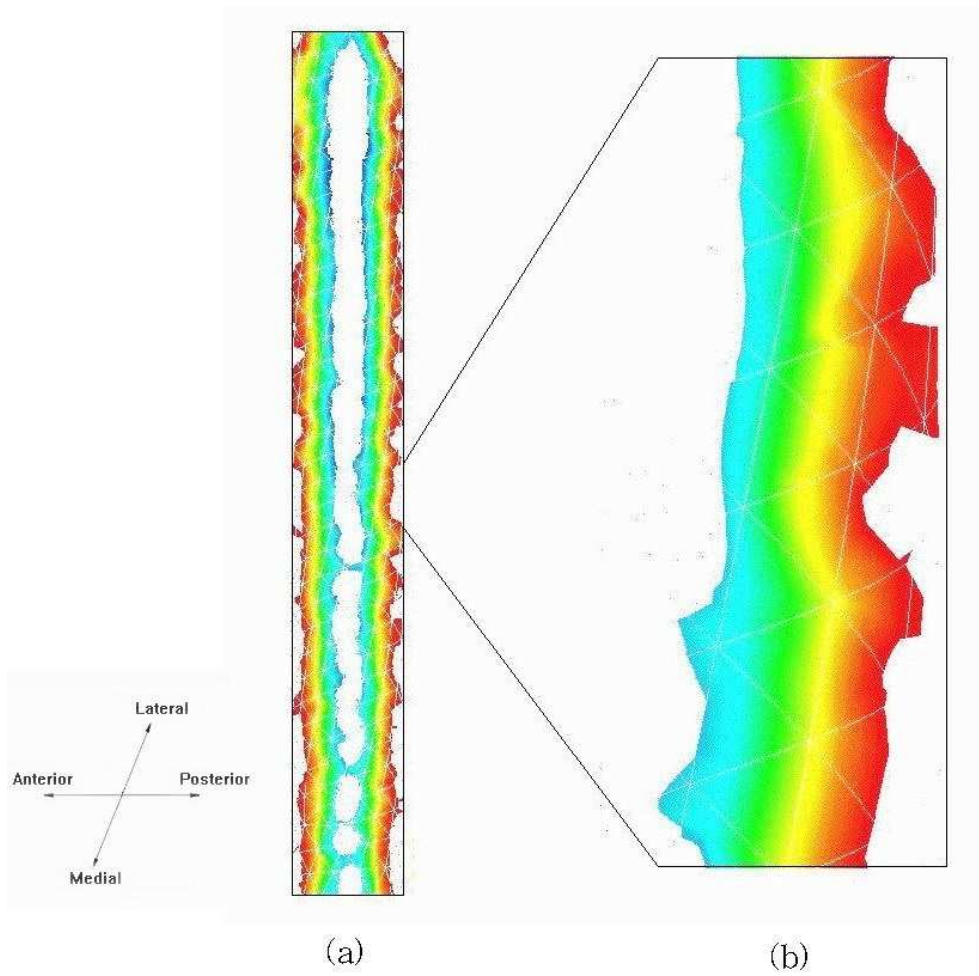
fig 10. 위상최적화용 해석 모델의 기본 형상  
(a) 원기둥 (b) 타원 기둥 (c) 육면체

선택된 기본 형상을 기초로 형상의 크기를 결정하는 과정은 앞서 언급했듯이 수치적으로 해결될 수 없는 문제이기 때문에 반복 연산을 통하여 가장 근사적으로 곡률을 표현해주는 크기로 축의 직경에서 가장 직경이 큰 치수를 기준으로 5mm 가량 직경을 확장시키고, 모델의 전체 길이는

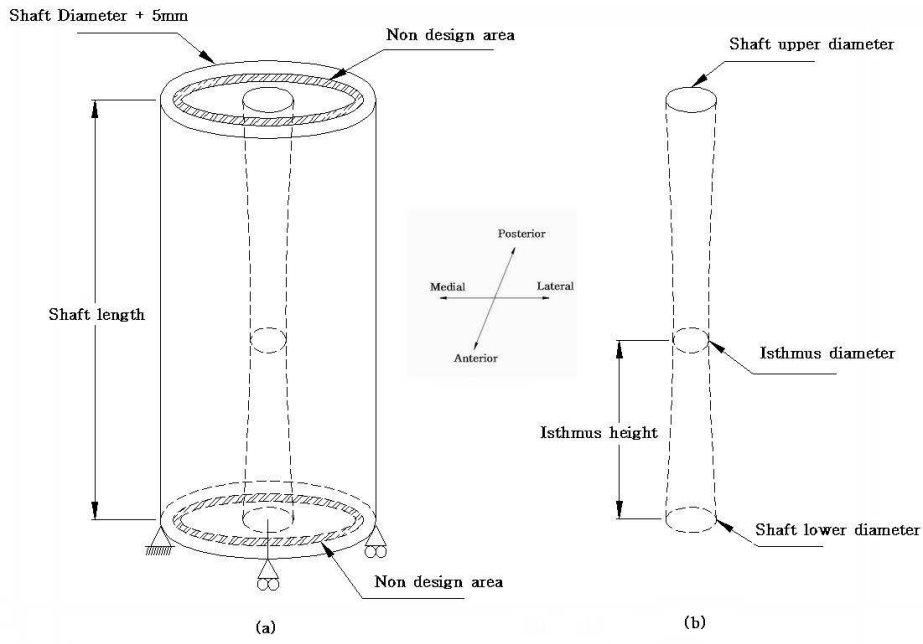
230mm로 모두 동일하게 적용하였다. 구멍의 형상에 대해서는 반복 연산을 통하여 원래의 형상에 좀 더 근사적으로 유사할수록 완만한 곡률이 표현되었기에 대퇴골 축의 상단과 하단 구멍의 직경과 대퇴골 축의 가장 좁은 부분(isthmus)의 위치에 isthmus 구멍의 직경을 사용하였다.

비설계 영역(non-design area)에 대해서는(fig 7) type I과 IV에서는 큰 차이를 보이지 않았고, 전체적으로 type III이 가장 큰 차이를 보였으나 곡률 표현에는 부적합하였고, 비록 큰 차이를 보이지는 않지만 type II가 근사적으로 곡률을 표현하기에 가장 적합하였다.

마지막으로 요소의 종류는 사면체 요소를 타원 기둥 모델에 적용한 경우 구멍이 생성되며 빠른 연산 시간과 완만한 수렴성을 보여주는 하나 표면상에서는 좋지 못한 결과를 나타내었으며(fig 11), 육면체 요소의 경우 Hassani B.와 Hinton E.에 의하면 8 개의 절점(node) 사용시 완만한 형상을 얻을 수 없다[15]고 했으므로 본 연구에서는 20개의 절점을 지니고 있는 육면체 요소를 사용하였다. 연산 시간 및 최종 형상을 고려하여 요소의 개수가 3200개 정도인 위상최적화용 모델을 설정하였으며, 결정된 모델의 대략적인 형상은 fig 12와 같다.



**fig 11.** 사면체 요소를 이용한 위상최적화 해석 결과 (a) 사면체 요소를 이용한 위상최적화 기법의 해석 결과 A-L절단면 (b) 외측(Lateral)의 표면을 일부 확대한 그림으로 곡률을 측정하기에는 적합하지 않다.



**fig 12.** 위상최적화 해석을 위한 모델, shaft length는 230mm이며 모델은 shaft diameter의 가장 큰 직경을 기준으로 가로 길이가 5mm 확장된 타원 기둥.

## 2) 곡률 분석 결과

위상최적화의 결과는 다음 fig 13과 같다. 이는 전-후 (anterior-posterior)방향의 절단면을 보여 주고 있으며 각 요소에 대한 밀도 값은 색으로 표시되어 있다. 이때 요소의 값은 색이 가장 진할수록 값이 1에 가까우며 해당 요소는 완벽한 재료임을 나타내고, 흰색에 가까울수록 값은 0에 가까우며 이때의 요소는 재료가 없는 부분으로 그림에서 보면 posterior방향의 재료가 사라져 어떠한 곡률의 형상을 띄우고 있는 것을 알 수가 있다.

곡률의 분석은 posterior방향을 기준으로 요소의 값이 1에 가까운 부분의 node에 대한 좌표 값을 이용하여 20~40개 가량의 좌표 값을 산출한 다음 곡선의 접합(curve fitting)을 이용하여 결정계수( $R^2$ )의 값이 0.9이상 이 되도록 근사 함수를 만든 뒤 각 포인트에서의 곡률 값을 계산한 다음 전체에 대한 평균값을 계산하여 곡률 값을 찾아내었다. 이때 위상최적화용 모델의 축의 길이는 실제 대퇴골 축의 길이와 다르기 때문에 최적화를 통한 곡률 값에는 최적화 모델에 적용된 축의 길이(230mm)를 나누고, 실제 측정된 곡률 값에는 각 대퇴골의 축 길이를 나누어 각 값을 평준화를 시킨 뒤 비교하였다.(table 7, fig 14)

Model	축 길이(mm)	곡률 값(1/m)		평준화된 곡률 값( $\frac{1}{m}$ )	
		측정값	최적화된 값	측정값	최적화된 값
A	202.94	1.77	5.278	0.008722	0.022948
B	200.501	1.95	5.786	0.009726	0.025157
C	208.3361	2.29	6.291	0.010992	0.027352
D	221.7157	2.36	7.043	0.010644	0.030622
E	208.4263	2.64	7.265	0.012666	0.031587

table 7. 측정된 곡률 값과 위상최적화 기법을 통한 곡률 값

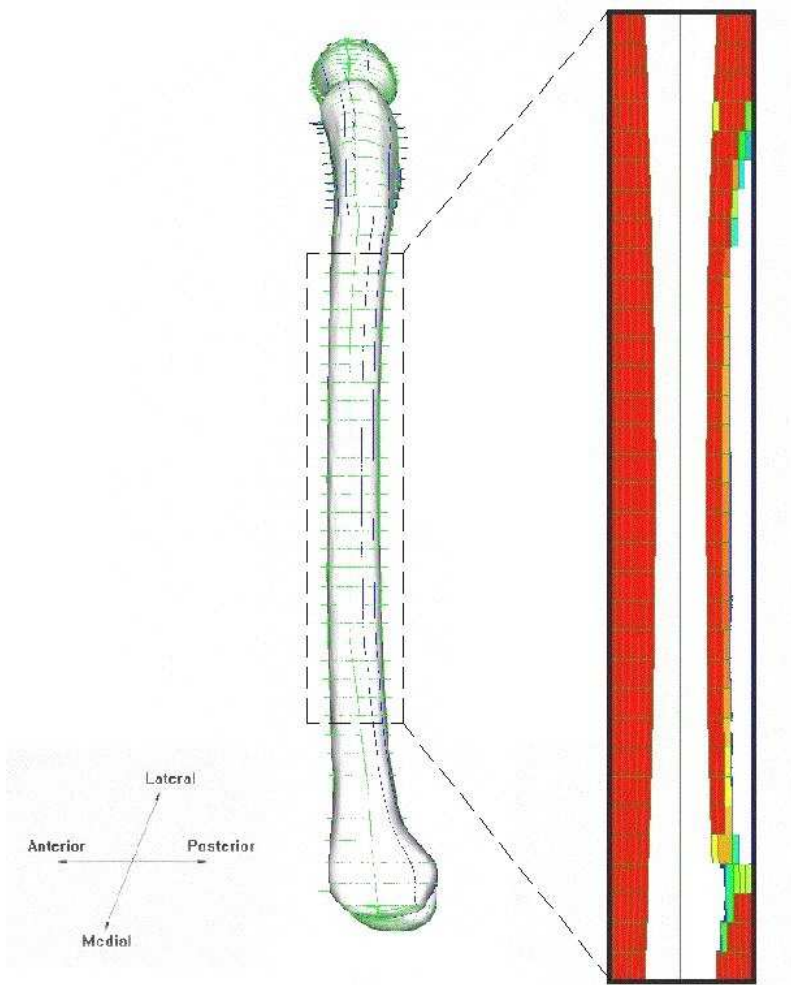


fig 13. model-A의 위상최적화 해석 결과 내측(Medial)과 외측(Lateral)의 절단면을 보여주고 있다.

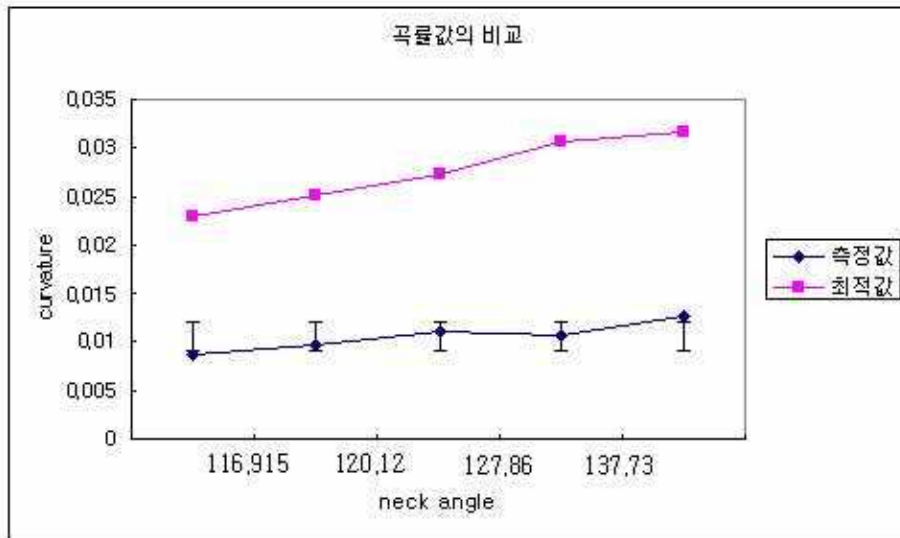


fig 14. 측정된 곡률값과 위상최적화 해석을 통한 곡률값의 비교 : 측정값의 세로축에는 데이터의 표준 편차를 나타내고 있다.

결과를 살펴보면 최적화 과정을 통하여 산출된 곡률의 값이 neck angle의 값 변화에 따라 증가하는 것을 알 수 있으나 실제 측정된 곡률 값에 비해 3 배 가량의 큰 값을 지니고 있다.

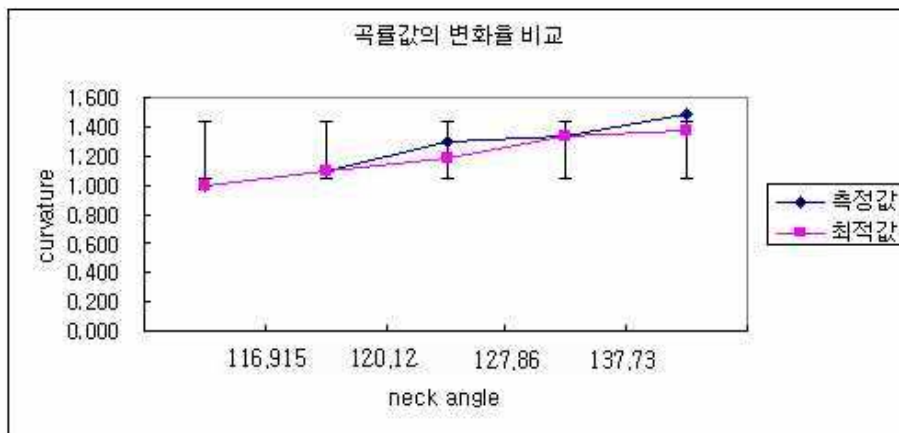


fig 15. 측정된 곡률값과 위상최적화 해석을 통한 곡률 값 간의 변화율 비교

그러나 각 곡률값에 대한 변화율을 알기 보기 위해 model A의 곡률값(가장 작은 곡률값)을 기준으로 모든 곡률값을 나누어서 비교해 보면 (fig 15) 거의 근사한 변화율을 보여주고 있다는 것을 확인 하였다. 이러한 결과를 토대로 앞서 언급한 내반(varus)과 외반(valgus)의 형상에 따른 곡률값의 변화가 위상최적화기법으로 증명이 가능하다는 것을 알 수 있다.

## 4. 고찰

본 연구에서는 위상최적화 기법을 이용하여 대퇴골의 축에 하중이 가해질 때의 골 재형성을 분석하여 실제 측정된 곡률값과 위상최적화 해석을 통한 곡률값을 비교하였다. 이들 값들은 비록 유사한 변화율을 보이고 있으나 값 자체는 3배의 차이를 보이고 있다. 이는 다음과 같은 이유에 기인하는 것으로 생각해 볼 수 있다.

곡률을 표현할 수 있는 위상최적화용 모델을 설정함에 있어 적합한 모델을 설정하기 위해 많은 변수를 도입하여 반복 실험했지만 실제 모델과 가장 근접한 모델은 유한요소해석에 사용된 대퇴골 모델의 축 부분이다. 그러나 위상최적화해석 과정에 있어 volume fraction을 생각해 보게 되면 이미 대퇴골의 축 부분은 여러 가지 요인을 거쳐 골 재형성이 이루어져 있는 형상이기 때문에 유한요소해석에 사용한 대퇴골 축에서의 volume fraction 즉, 전체 설계 영역 내에서 몇 %만 사용하겠다는 것은 옳지가 않으며 volume fraction을 100%로 설정한다면 위상최적화 기법은 아무런 의미도 없게 된다. 결국 volume fraction을 고려한다면 실제 대퇴골 축 모델에 비해서는 모델이 커질 수밖에 없으며 이는 앞서 언급했듯이 수치적으로 계산될 수 없기에 정성적인 판단을 할 수 밖에 없다.

그렇다면 앞서 언급했듯이 약간 더 큰 모델을 사용해야 하는데 모델의 크기가 약간 더 커지더라도 최대한으로 비슷한 형상을 만들게 된다면 결과는 달라질 수도 있을 것이다. 그러나, 여기에서 하나의 문제점이 발생되는데 위상최적화 기법을 사용할 때의 모델은 일반적으로 구조물의 경우 최대한 비슷할 필요가 없이 어느 정도 근사적인 모델만으로도 최적화된 형상을 표현하는데 충분하다. 대퇴골 축의 곡률을 표현하기 위해서는 최대한 정확해야 하는 요소는 형상이 아니라 하중/경계 조건 일수도 있다. 그러나 초기 모델 타입을 결정하는 과정에서 4개의 하중 조건이 아닌 8개의 하중 조건을 적용시켜 보았으나 4개의 하중 조건에 비해 매우 좋지 않은 결과를 보여 주었다.(fig 16.) 그렇다면 전 면적에 작용하는 분포 하중을 생각해 볼 수 있으나 본 연구에서는 분포하중까지 적용시켜 보지는 못했다. 더불어 앞서 언급한 것처럼 모델의 크기 자체가 약간 더 크기 때문에

하중의 작용 범위를 어디까지 결정해야 하는가에 대한 문제는 좀 더 연구  
해봐야 할 것이다.

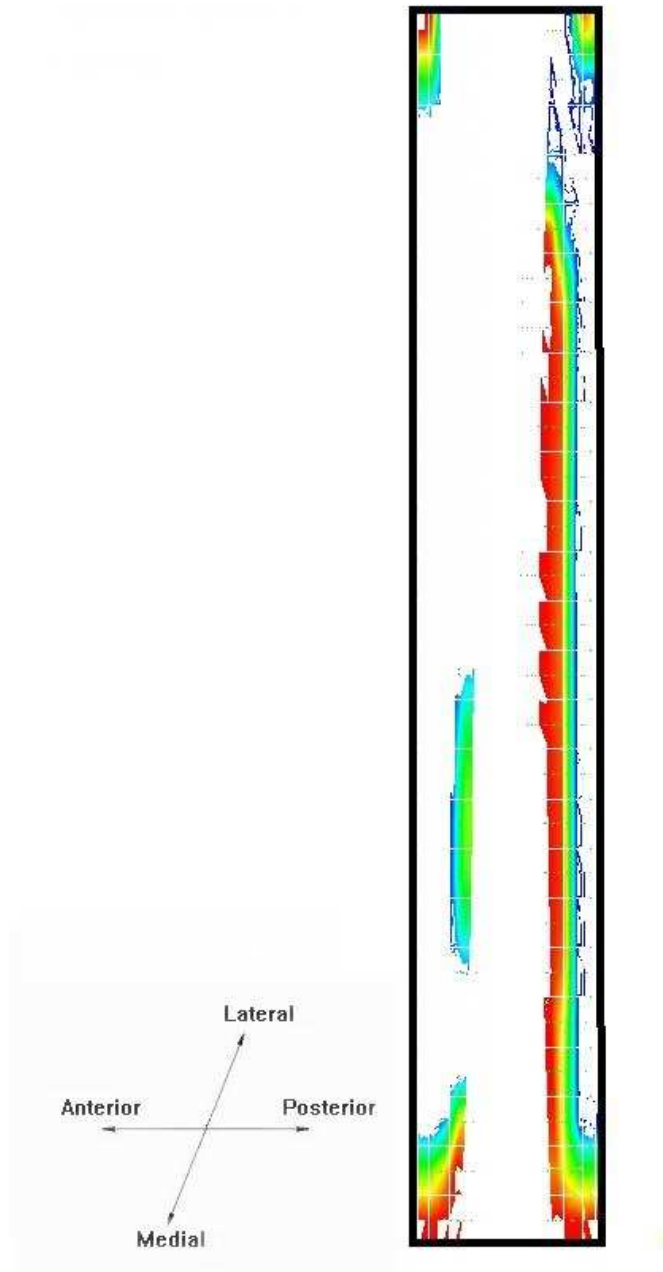


fig 16. 8개의 하중 적용 시 위상최적화 결과

더불어 제시될 수 있는 문제점은 목적함수로 본 연구에서 사용된 목적함수인 minimum compliance는 어떤 관점에서 보면 뼈의 지지 기능 (support)만을 고려한 목적함수라 할 수 있다. 뼈의 대표적인 기능을 살펴보면 다음과 같다.

- ① 지지 기능 (support)
- ② 보호 기능 (protection)
- ③ 운동 기능 (movement)
- ④ 항상성 유지 기능 (homeostasis)
- ⑤ 조혈 기능 (hematopoiesis)

여기서 운동 기능은 위상최적화 기법의 적용에 맞지 않으므로 제외 하고 지지 기능과 보호 기능은 경계 조건으로 해결될 수 있는 문제이므로 위상최적화 기법의 적용이 가능하나 대퇴골은 보호 기능보다 지지 기능의 성질이 더욱 강하므로 지지 기능 하나만을 생각해 볼 때 목적함수가 minimum compliance 하나만을 적용시켜도 무리가 없을 거라 예상되지만 나머지 뼈의 기능인 항상성 유지 기능(homeostasis), 조혈 기능 (hematopoiesis)에 대한 목적함수로는 부적합하다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위해서는 다중목적 함수의 적용과 항상성 유지 기능과 조혈 기능에 적용할 수 있는 목적함수를 사용해야 한다.

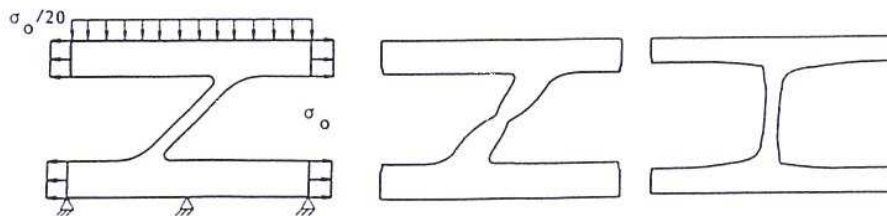


fig 17. SKO(Soft kill optimization)를 이용한 망상골의 위상최적화 과정

이외에 골 재형성에 적용된 다른 방법으로는 SKO(soft kill optimization) 방법이 있는데 이는 구조물에서 응력(stress)를 적게 받는 부분의 재료가 제거 되는 방법으로 망상골(trabecular bone)에 최적화 기법을 적용하여 최적의 방향을 계산한 사례가 있지만(fig 17.) 아직까지는

뼈의 한 단위(osteon)에만 적용되었을 뿐 형상의 전체나 일부분에 적용된 예는 없다. [16]

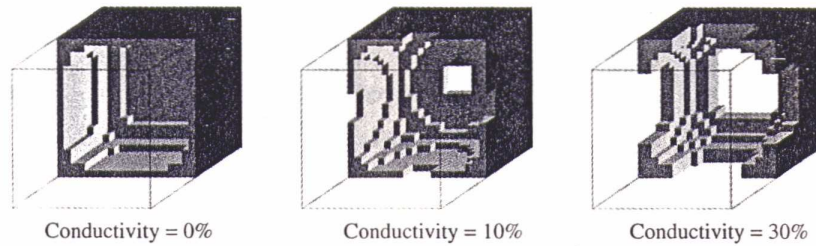


fig 18. 전도율(Conductivity)에 따른 골 재형성. 그림은 기본 요소의 절단면을 보여주고 있으며 전도율이 0%일 때 폐구간을 나타내며 전도율이 증가될수록 점차개구간으로 바뀌어 나간다.

망상골의 골 재형성을 해석하기 위해 적용된 다른 목적함수로는 3차원 요소가 위상최적화 기법을 통하여 최적화가 된 경우 3차원 요소는 폐구간(close-walled)의 형상을 띄게 되지만 대부분의 뼈 구조는 개구간(open-walled)의 형상을 지닌다. 이러한 문제를 해결하기 위해 세포의 투과성(permeability of the cell)이라는 개념을 도입하여 해결할 수 있는데 여기서 투과성이란 뼈의 골 재형성에 필요한 영양분의 흐름(flow of nutrients)을 뜻하는 것으로 그 크기를 전도율(conductivity)라 할 때 전도율이 클수록 해당 요소의 형상은 개구간으로 바뀌고 적을수록 폐구간의 형상을 띄게 된다.(fig 18.) 이러한 두 가지의 형상에 대한 목적함수를 비교해 볼 때 폐구간 구조가 개구간 구조 보다 강성이 더욱 크다. 결국 이러한 방법으로 적용할 때에는 골 재형성 과정에서의 강성의 증가라는 과정이 무시된다는 것을 뜻한다. 따라서 골 재형성의 기전을 표현하기 위한 목적함수는 하나만으로 할 수 없으며 다른 목적 함수를 필요로 한다는 것을 뜻한다. [17]

더불어 본 연구에서는 대퇴골의 축만을 모델 설정하여 위상최적화 해석을 시도하였지만, 대퇴골의 전체 모델을 이용하여 축 부분을 위상최적화 해석을 할 경우 연산시간이 너무나 길어지기 때문에(요소의 개수에 따라 달라지지만 대략 3만개 가량 사용했을 경우 15~20일 가량의 연산 시간을 필요로 한다.) 시도해 보지는 못했으나 이러한 방법을 사용한다면 또 다른 결과를 기대할 수 있을 것이다.

결국 좀 더 정확한 골 재형성을 위상최적화 기법으로 해결하기 위해서는 다양한 뼈의 기능을 모두 만족시켜 줄 수 있는 목적 함수의 연구가 선행 되어야 할 것이며, 이를 적용시킬 수 있는 연산 방법도 개발되어야 할 것이다. 또한 정확한 유한요소해석과 보다 더 적절한 경계조건이 필요하며 좀 더 빠른 수렴속도를 낼 수 있는 방법의 개발도 필요하다.

## 5. 결론

본 연구에서는 대퇴부 축의 곡률 값에 영향을 주는 요소들을 분석하여 가장 큰 영향을 주는 요소가 neck angle임을 찾아내었고, 이를 기준으로 골 재형성의 기전을 minimum compliance로 설정한 뒤 위상최적화 기법을 적용하여 대퇴골 축의 최적화된 곡률 값을 계산하였다. 측정된 데이터의 곡률값처럼 위상최적화 기법으로 최적화된 대퇴골 축의 곡률값이 neck angle의 값과 함께 증가하는 유사한 변화율을 보여주었다. 추후 위상최적화 기법이 골 재형성 현상 분석에 적절히 적용될 수 있을 것이라 사료된다.

## 참고문헌

1. Wolff, J.L. The law of bone remodelling, Das Gesetz der Transformation der Knochen, 1982, Translated by Maquet P, and Furlong R. Berlin : Springer, 1986
2. Rab-Cullen, DM, Akhter MP. Kimmel DB. Recker PR. Periosteal bone formation stimulated by externally induced bending strain. J Bone Miner Res 1994 9 : 43-52
3. Michell A.G.M, The limits of economy of material in frame-structures, Philosophical Magazine, 1904 8 : 305-316
4. Bendsoe, M.P. Kikuchi N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method., Comput Methods 1988 2 : 197-224
5. Sigmund, O. Topology optimization, a tool for the tailoring of structures and Materials., The Royal Society 2000 358 : 211-227
6. Hashin, Z. Strikman, S., A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials., J. Mech. Phys. Solids, 11, 1963 : 127-140
7. Lion, J. L., Some methods in mathematical analysis of systems and their control, Science Press, 1981.
8. Murat, F. and Tartar, L. Calcul des variations et homogenization. in: Led Methodes de l'Homogenization: Theorie et Applications en Physique, Coll. de la Dir, des Etudes et Recherches de Electricite de France, eyrolles, Paris, 1985, 319-370

9. Khang, G. Choi, K. Kim, C.S. Bae T.S., A Study of Korean Femoral Geometry, Clin. Orthop. Rel. Res., 406, pp 116-122, 2003
10. Choi, K. Choi, J.B. Choi, K.S. Bae, T.S. Cho, Y.J. Yoo, M.C, Geometrical analysis of Korean femur using CT image processing., 4th Asia-Pacific Conference on Medical and Biological Engineering, 1999 K.Choi, J
11. Bae, T.S. Kang, S.B. Choi, J.B. Choi,K., A study on the age-related geometrical change of femur in normal Korean adult., 4th Asia-Pacific Conference on Medical and Biological Engineering, 1999
12. Philippe, K. Zysset, X. Edward Guo, C. Edward Hoffler, Kristin E. Moore, Steven., Elastic modulus and hardness of cortical and trabecular bone lamellae measured by nanoindentation in the hyman femur., Journal of Biomechanics 1999 32 : 1005-1012
13. Taylor, M.E. Tanner, K.E. M.A,R , Freeman and A.L. Yettram., Stress and strain distribution within the intact femur, compression or bending?. Med. Eng. Phys 1996. Vol. 18, No. 2, 122-131
14. Pauwels, F., Biomechanics of the Locomotor Apparatus, 1980 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York)
15. Hassani, B. Hinton, E., Homogenization and Structural Topology optimization Theory, Practice and Software. Springer 1998
16. Baumgartner, A. Harzheim, and C. Mattheck., Soft kill option, the biological way to find an optimum structure topology
17. Bendsoe, M.P. Sigmund, O., Topology optimization Theory, Methods and Applications. Springer 2002

18. Banchong, Mahaisavariya, Kriskrai, Sitthiseripratip, Trongtum, Tongdee, Erik L.J. Bohez, Jos Vander Sloten, Philip, Oris., Morphological study of the proximal femur. *Medical Engineering & Physics* 2002, 24 : 617-622
19. Chen, B.C. Kikuchi,N., Top ology optimization with design dependent loads. *Finite Element in Analysis and Design* 2001 37 57-70
20. Cuppone, M. Seedhom, B. B. Berry E. Ostell, A.E., The Longitudinal Young's Modulus of Cortical Bone in the Midshaft of Human Femur and its Correlation with CT Scanning Data. *Calcif Tissue Int* 2004 74 : 302-309
21. Georg, N. Duda. Markus Heller, Juergen Albinger, Olaf Schulz, Erich Schneider, Lutz Claes., Influence of muscle forces on femoral strain distribution. *Journal of Biomechanics* 1998 31 : 841-846
22. Kikuchi, N. Suzuki, K., A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 1991 93 : 291-318
23. Hassani, B. Hinton, E., A review of homogenization and topology optimization I-homogenization theory for media with periodic structure. *Computers and Structures* 1998 69 707-717
24. Hassani, B. Hinton, E., A review of homogenization and topology optimization II-analytical and numerical solution of homogenization equations. *Computers and Structures* 1998 69 : 719-738
25. Hassani, B. Hinton, E., A review of homogenization and topology optimization III-topology optimization using optimality criteria.

26. Olhoff, N. Bendsoe, M.P. Rasmussen, J., On CAD-integrated structural topology and design optimization. Computer method in applied mechanics and engineering 1991 89 : 259-279
27. Philip, C. Noble, M.S. Jerry W. Alexander, B.S. Laura J. Lindahl, B.S. David, T. Yew, B.S, William, M. Granberry, M.D, Hugh S. Tullos, M.D., The Anatomic Basis of Feloral Component Design. Division of orthopedic surgery 1988
28. Rubin, P.J. Leyvraz, P.E. Aubaniac, J.M. Argenson, J. N. Esteve, P. DE Roguin, B., The Morphology of the proximal femur. J, Bone and joint sergery 1992 74-B : 28-32
29. Rybicki et al. 1972; Crowninshield et al., 1980; Huiskes et al., 1987; Huiskes, 1990; Merz et al., 1992; Lu et al., 1996
30. Tcherniak, D. Sigmund O. A web-based topology optimization program. Struct Multidisc Optim, Springer-Verlag 2001 22 : 179-187
31. Cowin, C. Bone Mechanics Handbook Second Edition. CRC Press. 2001
32. R. Bruce Martin, David B. Burr. Structure, Function, and adaptation of Compact Bone. Raven Press 143-156
33. Pamela K. Levangie, M.S., P.T. Joint structure & function. A comprehensive analysis second edition. F.A. Davis Company

## ABSTRACT

### **An analysis of femoral bone remodeling using topology optimization**

Lee, Ki Tae  
Major of Mechanical Systems  
Engineering  
Graduate school of Mechanical  
Systems Engineering  
Hansung University

Topology optimization method has an advantage of producing an initial design in addition to the increase in the effectiveness of product by the conventional optimization technique. The purpose of this research is to examine which shape factor of femur is closely related with the curvature of femoral shaft using topology optimization. The result shows that the neck angle has the greatest influence on the curvature of femoral shaft. The curvature of femoral shaft was found to increase with the neck angle, and this result corresponds well to the measured value. The present study demonstrates the fact that the increase or decrease in the

curvature of femoral shaft occurs according to the valgus varus. But, the optimize value is three times higher than the measured value. Therefore, I suggest that a different objective function or different optimization model should be developed for the purpose of improving the correctness of optimization.